EXERCICE№9

$W_n = \frac{n!}{3^n}$; n∈ IN

1) $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$

$n \geq 3 \Longrightarrow n+1 \geq 4 \Longrightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3}$, d'où $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$

2) démonstration par récurrence

*** vérifions pour n = 3**

$W_3 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^0 W_3$ (donc la proprieté est vraie à l'ordre initial)

*** Soit n ≥ 3**

Supposant que : $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ et montrons que : $W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

D'après 1) : $W_{n+1} \geq \frac{4}{3} W_n \Longrightarrow W_{n+1} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$

$\Longrightarrow W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

***conclusion :** $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

3) $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3 = +\infty$ car : $W_3 > 0$ et $\frac{4}{3} \geq 1$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} W_n = +\infty$

EXERCICE№10

$U_n = \frac{n}{3^n}$; n ≥ 1

1) – a) $A_0(0,0)$; $A_1(1,\frac{1}{3})$; $A_2(2,\frac{2}{3^2})$; . . . . .

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$ pour : n ≥ 1 , $\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{2}{3} = \frac{1-n}{3n} \leq 0$

d'où : , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$ pour : n ≥ 1

c) pour : n = 0 ; $U_0 = 0$; $U_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$, (vraie)

Supposant que : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que : $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

D'après b) : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ *or* $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

***conclusion :** $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour n ∈ IN

d) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$